ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE PLANE

DEFINITIONS : La géométrie est l'étude des volumes, surfaces et lignes, du point de vue forme et dimensions.

Volume : portion de l'espace occupée par un corps solide

Surface : limite entre un volume et l'espace environnant

Ligne : intersection de deux surfaces (curved lines)

Point : intersection de deux lignes (point)

Figure : ensemble de points, lignes et surfaces

Figures égales : deux figures sont égales si elles peuvent coïncider

LA DROITE (straight line)

notées (AB), (a)

Postulats de la droite :

1) par deux points on ne peut faire passer qu'une droite et une seule
2) la droite est illimitée de part et d'autre des points qui la détermine

demie droite : (ray) portion de droite limitée dans un sens par un point et illimitée dans l'autre

deux demie droites sont opposée quand, ayant même origine, elles sont dans le prolongement l'une de l'autre

segment de droite : (segment) portion de droite limitée dans chaque sens par un point

segments proportionnels : étant donné deux points fixes A et B sur une droite (d) et un point mobile M sur d, ce point partage AB en :

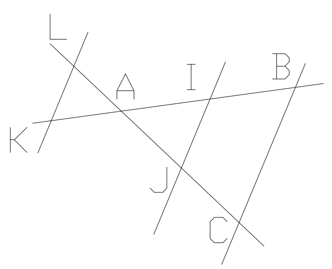
- deux segments additifs si la somme de ces segments est égale à AB
- deux segments soustractifs si la différence de ces segments est égale à AB

si M est un point de (d) il n'existe que deux positions et deux seulement du point M tel que le rapport MA/MB ait une valeur donnée ; une de ces positions est à l'intérieur de AB, l'autre à l'extérieur.

<u>Segments homologues :</u> quand des sécantes coupent un faisceau de droites, les segments déterminés sur ces sécantes par les mêmes droites du faisceau sont dites homologues.

<u>Segments proportionnels :</u> des segments de droites sont dits proportionnels lorsque l'on a : AB/A'B'=CD/C'D'

<u>Théorème de Thalès :</u>



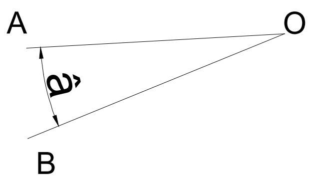
AI/AB=AJ/AC
AK/AB=AL/AC
IJ/BC=AI/AB
KL/CB=AL/AC

<u>**LE PLAN**</u> (plane)

surface illimitée contenant entièrement une droite passant pas deux de ses points. Une figure plane est une figure entièrement située dans un plan ; à l'opposée une figure spatiale n'est pas entièrement située dans un plan.

<u>**ANGLES**</u>

<u>**Définition :**</u> un angle est une portion de plan, limitée par deux demi-droites, qui sont les cotés de l'angle, et ayant une même origine, appelée somment de l'angle (vertex). e.g. angle AOB



<u>**propriétés :**</u>

<u>angle adjacents :</u> (adjacent angles) : deux angles sont adjacent, lorsqu'ils ont même sommet, un coté commun, et qu'ils sont situés de part et d'autre de ce coté commun

perpendiculaire : une droite est perpendiculaire à une autre, lorsque les angles adjacents qu'elle forme avec celle-ci sont égaux ; une droite non perpendiculaire à une autre est dite oblique.

D'un point pris sur une droite, on ne peut élever qu'une perpendiculaire à cette droite et une seule.

Angle droit : (right angle) un angle est dit droit lorsque ses cotés sont perpendiculaires l'un à l'autre. Il s'agit de l'unité de mesure des angles.

- un angle aigu est inférieur à un droit (acute angle)
- Un angle obtus est supérieur à un droit (obtuse angle)
- Angles complémentaires : leur somme vaut un droit (complementary angles)
- Angles supplémentaires : leur somme vaut deux droits (supplementary angles)

Division centésimale	**Division sexagésimale**
1 dr = 100 grades (gr)	1 dr = 90°
1 gr = 100 centigrades (cgr)	1°=60 minutes (')
1 cgr = 100 décimilligrades (dmgr)	1' = 60 secondes ('')

Théorème : Deux angles adjacent ayant leurs cotés extérieurs en ligne droite sont supplémentaires

Corollaire : la somme de tous les angles adjacents consécutifs formés d'un même coté d'une droite vaut deux droits.

Réciproque : si deux angles adjacents sont supplémentaires, leurs cotés sont en ligne droite

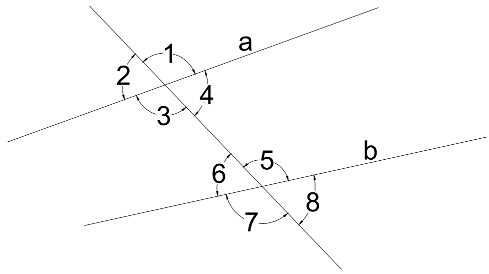
Angle opposés par le sommet : deux angles sont opposés par le sommet quand les demi-droites qui les forment sont opposées.

Théorème : deux angles opposés par le sommet sont égaux.

Réciproque : si deux angles égaux ont même sommet, deux cotés dans le prolongement l'un de l'autre, et si les deux autres cotés sont de part et d'autre de la droite des premiers, ils sont aussi en ligne droite.

Bissectrice d'un angle : demi droite qui, issue du sommet, partage l'angle en deux parties égales.

Nomenclature des angles :

4/6 , 3/5 : alternes internes 1/7 , 2/8 : alternes externes (alternate angles) 4/5 , 3/6 : intérieurs d'un même coté de la sécante 1/8 , 2/7 : extérieurs d'un même coté de la sécante (intérior and exterior angles) 1/5 , 4/8 : angles correspondants 2/6 , 3/7 : angles correspondants (corresponding angles)	

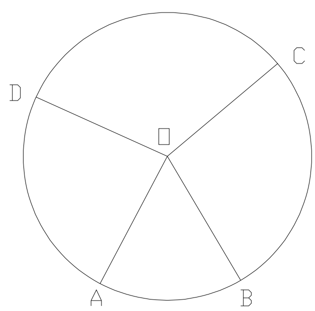
Mesure des angles :

Rapport entre un angle au centre et arcs interceptés : dans un même cercle ou dans des cercles égaux :

- deux angles au centre égaux interceptent des arcs égaux
- deux angles au centre inégaux interceptent des arcs inégaux, le plus grand angle interceptant le plus grand arc, inférieur à une demi circonférence

et réciproquement

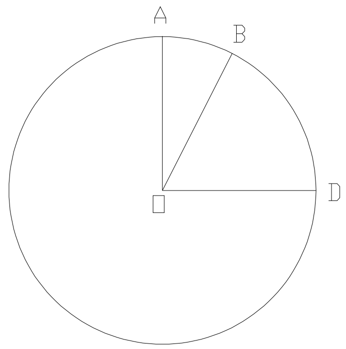
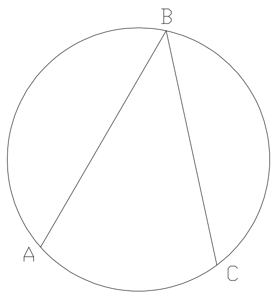
rapport de deux angles au centre : dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, deux angles au centre sont entre eux comme les arcs interceptés

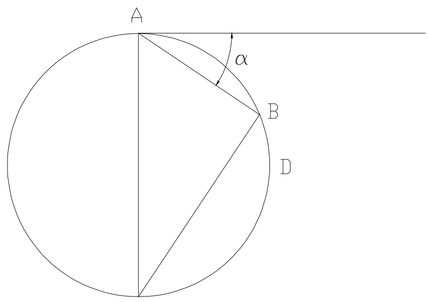
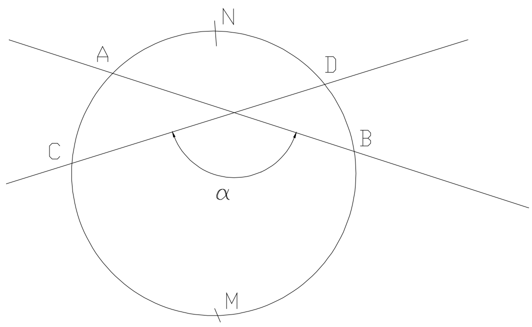
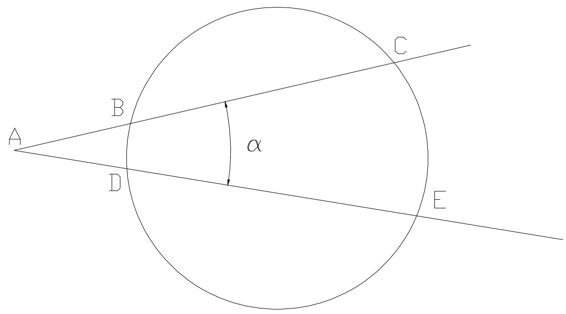
$\frac{angle(AOB)}{angle(COD)} = \frac{arc(AB)}{arc(CD)}$	

Mesure de l'angle au centre : tout angle au centre a même mesure que l'arc intercepté par ses cotés, à condition de prendre pour unité de mesure des arcs, celui intercepté par l'angle au centre unitaire.

Remarque :

- angle unitaire : 1 droit.
- Arc unitaire : 1 quadrant

$\frac{angle(AOB)}{angle(AOD)} = \frac{arc(AB)}{arc(AD)} => \frac{angle(AOB)}{1dr.} = \frac{arc(AB)}{1qu.}$ $=> mes.angle(AOB) = mes.arc(AB)$	
Mesure de l'angle inscrit : tout angle inscrit a même mesure que la moitié de l'arc intercepté entre ses cotés $mes.angle(ABC) = mes.(arc(AC)/2)$ corollaire : un angle inscrit est aigu, droit ou obtus suivant qu'il intercepte un arc inférieur, égal ou supérieur à une demi circonférence Arc du segment capable : si le point B se déplace, l'angle ABC a une valeur constante, désignée par α . On dit que l'arc ABC est l'arc du segment capable de l'angle α décrit sur AC comme corde	

<u>Angle formé par une tangente et une corde :</u> l'angle formé par une tangente et une corde issue du point de contact a même mesure que la moitié de l'arc sous tendu par la corde Tangente (At) et corde AB => mes. α = mes. (Arc(AB)/2)	
L'angle formé par deux sécantes qui se coupent à l'intérieur d'une circonférence a même mesure que la demi somme des arcs interceptés par les cotés de l'angle : $mes.angle(\alpha) = mes.(\frac{arc(AND) + arc(BMC)}{2})$	
L'angle formé par deux sécantes qui se coupent à l'extérieur de la circonférence a même mesure que la demi mesure que la demi différence des arcs interceptés par les cotés de l'angle : $mes.angle(\alpha) = mes.(\frac{arc(CE) - arc(BD)}{2})$	

<u>**PERPENDICULAIRES ET OBLIQUES**</u> (perpendiculars)

<u>Théorème :</u> Si d'un point extérieur à une droite, on abaisse la perpendiculaire et différentes obliques :

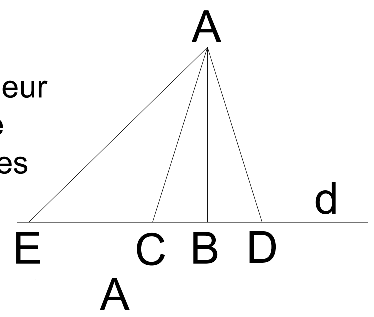
- la perpendiculaire est plus courte que toute oblique
- deux obliques dont les pieds s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales
- de deux obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, celle qui s'écarte le plus est la plus grande

<u>corollaire :</u> la distance d'un point à une droite est le segment de perpendiculaire abaissée de ce point sur cette droite.

<u>réciproque :</u>

- parmi les segments de droites joignant un point extérieur d’une droite aux différents points de celle-ci, le plus petit est la perpendiculaire abaissée de ce point sur cette droite.
- Deux obliques égales s’écartent également du pied de la perpendiculaire
- Deux obliques inégales s’écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, la plus grande est celle qui s’en écarte le plus.

hypothéses:
d droite, A pt extérieur
AB perpendiculaire
AC, AD, AE obliques
BC=BD
BE>BC



thése:
AB<AD
AC=AD
AE>AC

PARALLELES (parallels)

Définition : Deux droites sont parallèles lorsque, situées dans un même plan, elles ne se rencontrent jamais.

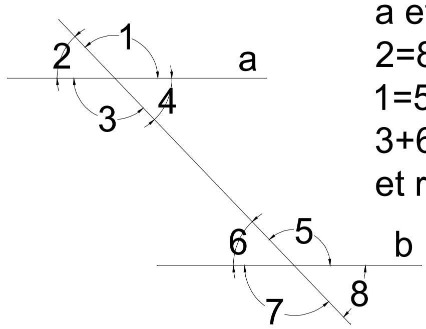
Postulat d’Euclide : par un point extérieur à une droite, on ne peut mener qu’une seule parallèle à cette droite (nota : il s’agit là du postulat de la géométrie Euclidienne, il en existe d’autres)

Si deux droites sont parallèles :

- Toute droite qui rencontre l’une rencontre l’autre
- toute droite perpendiculaire à l’une est perpendiculaire à l’autre
- si elles sont parallèles à une même troisième, elles sont parallèles entre elles

parallèles coupés par une sécante :

- les angles alternes externes sont égaux
- les angles correspondants sont égaux
- les angles intérieurs d’un même coté de la sécante sont supplémentaires
- les angles extérieurs d’un même coté de la sécante sont supplémentaires



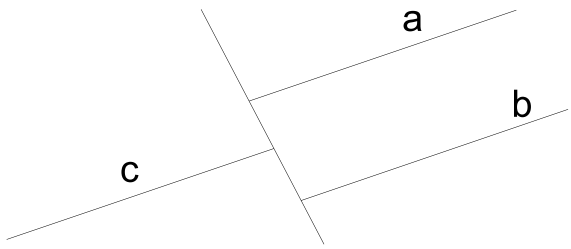
a et b // =>
2=8
1=5
3+6=2dr.
et réciproquement

<u>corollaire :</u> si deux droites coupées par une sécante remplissent une des conditions suivantes, elles sont parallèles :

- les angles alternes externes sont égaux
- les angles correspondants sont égaux
- les angles intérieurs d'un même coté de la sécante sont supplémentaires

<u>demi droites directement et inversement parallèles :</u>

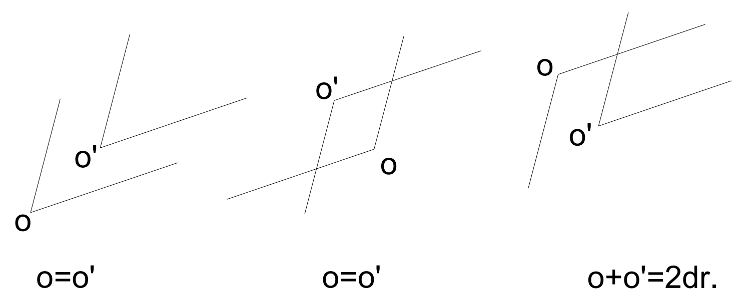
- deux demi-droites sont directement parallèles quand, étant parallèles, elles sont situées dans une même région du plan par rapport à la droite joignant leurs origines.
- Deux demi-droites sont inversement parallèles lorsque, étant parallèles, elles sont situées de part et d'autre de la droite joignant leurs origines.



a et b directement parallèles
a et c indirectement parallèles

<u>angles à cotés parallèles :</u>

- deux angles à cotés parallèles sont égaux s'ils ont leur cotés directement ou indirectement parallèles
- deux angles à cotés parallèles sont supplémentaires si deux cotés sont directement parallèles et les deux autres indirectement parallèles



angles à cotés perpendiculaires :

- ils sont égaux s'ils sont tous deux aigus ou obtus
- ils sont supplémentaires si l'un est aigu et l'autre obtus

POLYGONES (polygons)

Ligne polygonale : ensembles de segments de droites placés bout à bout, non dans le prolongement l'un de l'autre.

- ligne polygonale fermée : l'extrémité du premier segment coïncide avec l'origine du premier
- ligne polygonale ouverte : cas contraire

polygone : portion de plan limitée par une ligne polygonale fermée

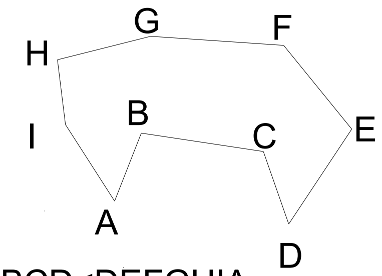
- convexe : entièrement située dans une même région du plan par rapport à chaque coté prolongé
- non convexe : cas contraire

les polygones sont désignés par leur nombre de cotés : triangles, quadrilatère, pentagone, hexagone, etc.

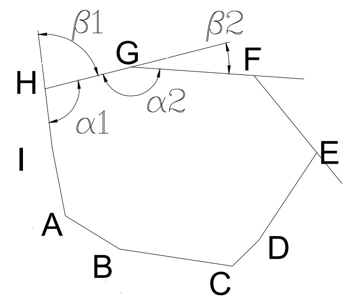
- angle intérieur : angle formé par deux cotés consécutifs
- angle extérieur : angle formé par un coté et le prolongement du coté consécutif

<table>
<tr>
<td><u>Somme des cotés d'un polygone :</u> chaque coté d'un polygone est inférieur à la somme de tous les autres

<u>Généralisation :</u> Une ligne polygonale convexe est moindre qu'une ligne polygonale quelconque qui l'entoure complètement et qui a les mêmes extrémités

<u>Corollaire :</u> si l'on joint un point intérieur d'un triangle aux extrémités d'un coté, la somme des segments ainsi obtenus, est moindre que le somme des deux autres cotés.</td>
<td>

ABCD<DEFGHIA</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Somme des angles d'un polygone convexe :</u> elle est égale à autant de fois deux droits qu'il y a de cotés moins deux, soit : $\sum \alpha_i = 2dr.(n-2)$

<u>Corollaire :</u> la somme des angles extérieurs obtenus en prolongeant tous les cotés d'un polygone dans un même sens est égale à 4 droits, soit : $\sum \beta_i = 4dr.$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

<u>TRIANGLES</u> (triangles)

<u>Droites caractéristiques :</u>

- médiane (median) : droite joignant un sommet au milieu d'un coté opposé (AD)
- médiatrice (mid-perpendiculars) : perpendiculaire élevée au milieu d'un coté (m)
- bissectrice : segment de droite qui, issue du sommet, divise l'angle en deux parties égales et se limité au coté opposé (BE)
- hauteur (altitude) : segment de perpendiculaire abaissée d'un sommet sur le coté opposé et limité à ce coté (AF)

<u>propriétés de ces droites :</u>

- tout point sur la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment ; tout point extérieur à la médiatrice d'un segment est inégalement distant des extrémités de ce segment.
- Tout point équidistant des extrémités d'un segment de droite est sur la médiatrice de ce segment
- Tout point appartenant à la bissectrice d'un angle est équidistant des cotés de l'angle
- Tout point équidistant des cotés d'un angle appartient à la bissectrice de cet angle

triangle isocèle : dans un triangle isocèle aux cotés égaux sont opposés des angles égaux. Inversement si dans un triangle deux angles sont égaux, ce triangle est isocèle.

Dans un triangle isocèle, une même droite, issue du sommet, est médiane, hauteur, médiatrice par rapport à la base, et bissectrice de l'angle au sommet.

Egalité des triangles : (congruent triangles)

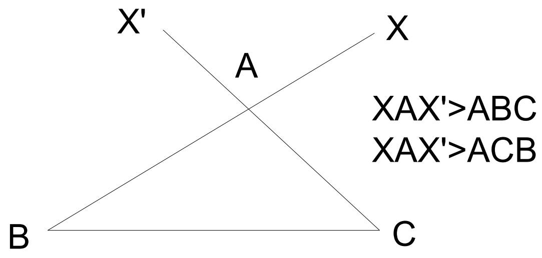
- deux triangles sont égaux s'ils ont un angle égal compris entre deux cotés égaux chacun à chacun.
- Deux triangles sont égaux s'ils ont un coté égal compris entre deux angles égaux chacun à chacun
- Deux triangles sont égaux s'ils ont les trois cotés égaux chacun à chacun

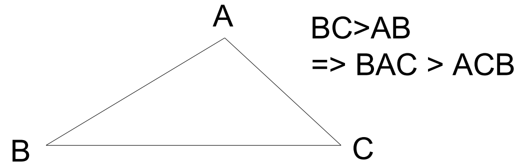
Dans deux triangles égaux, aux cotés égaux sont opposé des angles égaux et réciproquement.

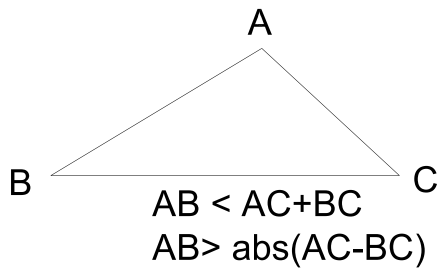
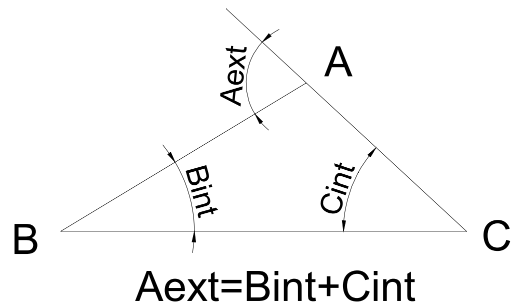
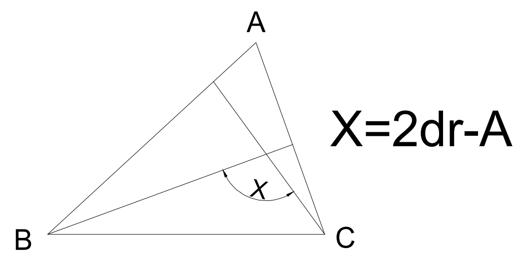
Deux triangles rectangles sont égaux si :

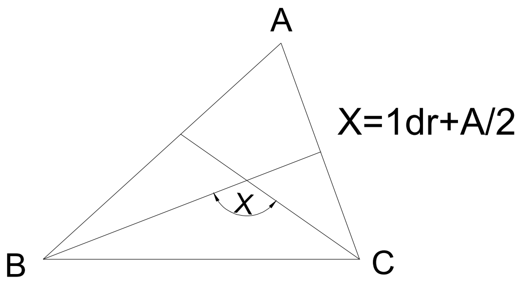
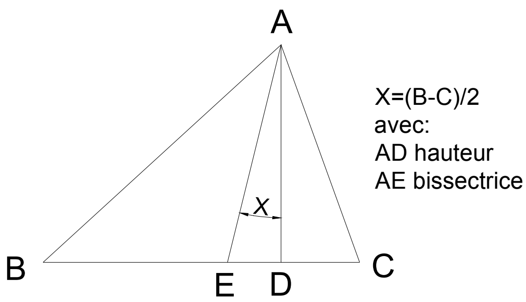
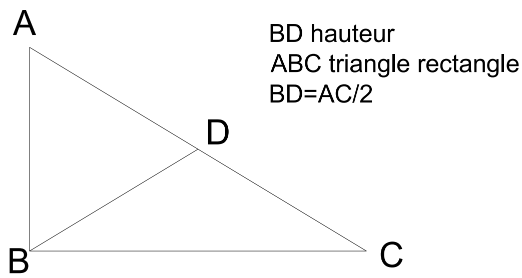
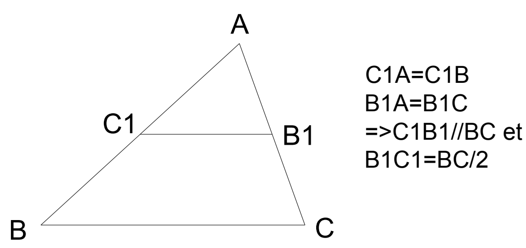
- ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal
- ils ont l'hypoténuse égale et un cathéte égal

Triangles quelconques :

<table>
<tr>
<td><u>Angles extérieurs :</u> tout angle extérieur d’un triangle est supérieur à chacun des angles intérieurs non adjacents</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Coté et angle opposé :</u> dans tout triangle, à un plus grand coté est opposé un plus grand angle.

<u>Réciproque :</u> dans tout triangle, à un plus grand angle est opposé un plus grand coté</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Somme des cotés d’un triangle :</u> chaque coté d’un triangle est inférieur à la somme des deux autres.

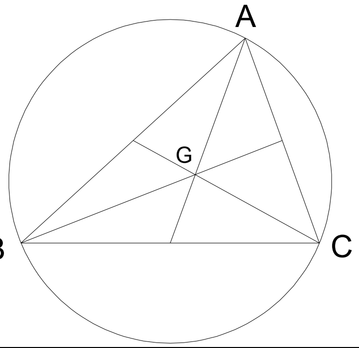
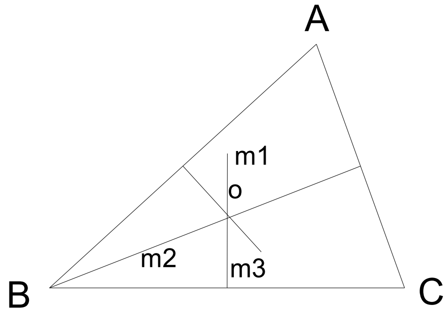
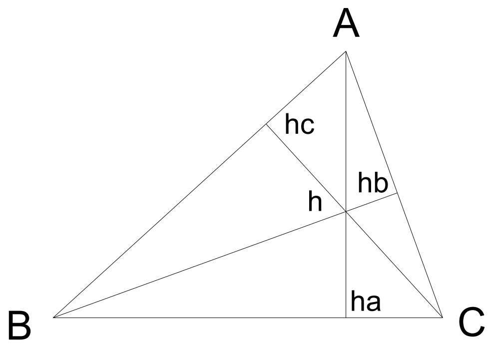
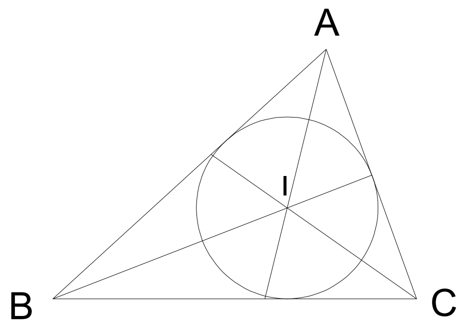
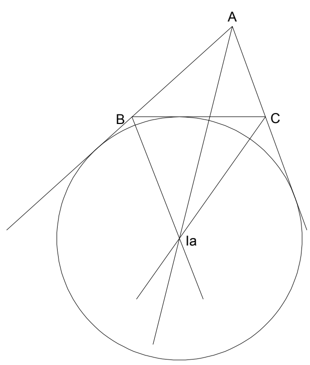
<u>Corollaire :</u> chaque coté d’un triangle est inférieur à la différence des deux autres.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Angle extérieur d’un triangle :</u> il est égal à la somme des angles intérieurs non adjacents</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Angle formé par deux hauteurs :</u> c’est le supplément de l’angle d’où aucune hauteur n’est issue.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

<u>Angle formé par deux bissectrices :</u> égal à un droit augmenté de la moitié de l'angle dans lequel on n'a pas mené de bissectrice	
<u>Angle formé par la bissectrice et la hauteur issue d'un même sommet :</u> égal à la demi différence des deux autres angles	
<u>Médiane d'un triangle rectangle :</u> dans tout triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse vaut la moitié de celle-ci. <u>Réciproque :</u> si la médiane relative à un coté vaut la moitié de celle-ci, ce triangle est rectangle	
Le segment de droite joignant les milieux de deux cotés d'un triangle est parallèle au troisième et en vaut la moitié <u>Réciproque :</u> si, par le milieu du coté d'un triangle, on mène la parallèle à un deuxième coté, elle passe par le milieu du troisième	

<u>Triangles inégaux :</u> deux triangles ayant un angle inégal compris entre deux cotés égaux chacun à chacun sont inégaux, et au plus grand angle est opposé le plus grand coté

<u>Réciproque :</u> si deux triangles ont deux cotés égaux chacun à chacun, et les troisièmes cotés inégaux, ces deux triangles sont inégaux et au plus grand coté est opposé un plus grand angle.

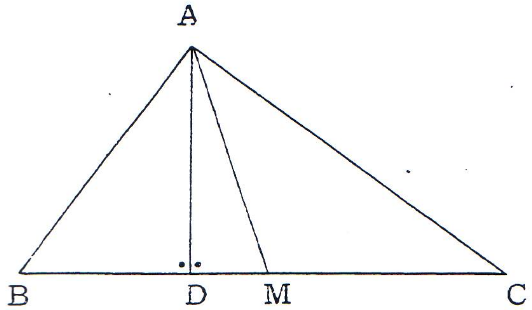
<u>Points caractéristiques d'un triangle :</u>

Centre de gravité d'un triangle (center of gravity) : dans tout triangle, les médianes se coupent en un même point situé sur chacune d'elle aux deux tiers à partir du sommet. Ce point est appelé centre de gravité G	
Centre du cercle circonscrit (circumcircle) : dans tout triangle, les médiatrices se coupent en un même point appelé centre du cercle circonscrit, et se désigne par O	
Orthocentre (orthocenter) : dans tout triangle les hauteurs se coupent en un même point appelé orthocentre et se désignant par h	
Centre du cercle inscrit (incircle) : dans tout triangle, les bissectrices des angles intérieurs se coupent en un même point appelé centre du cercle inscrit et se désignant par I	
Centre des cercles exinscrits (exircle) : dans tout triangle les bissectrices de deux angles extérieurs et la bissectrice du troisième angle intérieur se coupent en un même point, appelé centre du cercle exinscrit. Il y a trois possibilités : Ia, Ib, Ic, suivant l'angle intérieur considéré	

Aire d'un triangle : si a b c sont les longueurs des cotés et si 2p=a+b+c alors l'aire du triangle vaut :

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

théorèmes de la médiane :



Hypothèse : $\begin{cases} \text{triangle } ABC \\ AM \text{ médiane} \end{cases}$

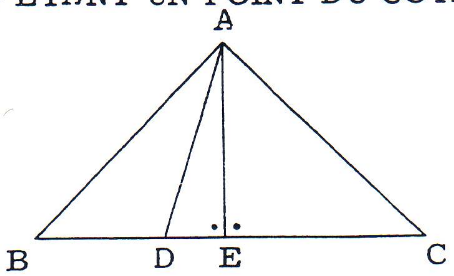
Thèse : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$

Hypothèse : $\begin{cases} \text{tr. } ABC \\ AM \text{ médiane} \\ AD \text{ hauteur} \end{cases}$

Thèse : $AC^2 - AB^2 = 2\ BC \cdot DM$

Relation de Stewart :

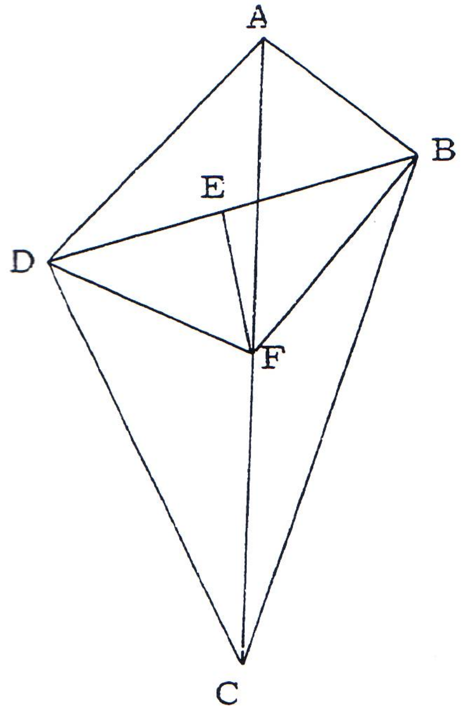
D ETANT UN POINT DU COTE BC D'UN TRIANGLE ABC, on a la relation :



$$AB^2 . DC + AC^2 . DB = AD^2 .BC + BC.BD.CD$$

FIGURES PARTICULIERES

Somme des carrés des cotés d'un quadrilatère :



<u>Hypothèse</u> : quadrilatère ABCD
E et F milieux de BD et AC

<u>Thèse</u> : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 =$

$$AC^2 + BD^2 + 4\,EF^2$$

<u>théorèmes de Ptolémée :</u>

DANS UN QUADRILATERE CONVEXE NON INSCRIPTIBLE, LE PRODUIT DES DIAGONALES EST INFERIEUR A LA SOMME DES PRODUITS DES COTES OPPOSES.

DANS UN QUADRILATERE CONVEXE INSCRIPTIBLE, LE PRODUIT DES DIAGONALES EST EGAL A LA SOMME DES PRODUITS DES COTES OPPOSES.

<u>Parallélogramme :</u> (parallelogram) quadrilatère dont les cotés opposés sont parallèles.

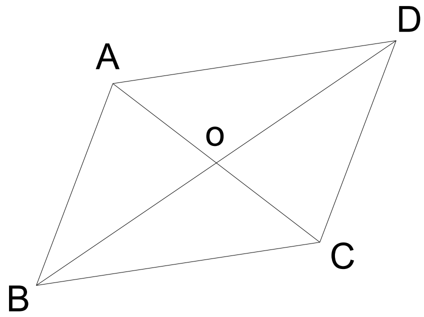
<u>Propriétés :</u>

- deux angles consécutifs sont supplémentaires

- les cotés opposés et les angles opposés sont égaux
- les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales

<u>conditions pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme :</u>

- si dans un quadrilatère convexe les angles opposés sont égaux, il s'agit d'un parallélogramme
- tout quadrilatère convexe dont les cotés opposés sont égaux est un parallélogramme
- tout quadrilatère convexe ayant deux cotés opposés parallèles et égaux est un parallélogramme
- tout quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent mutuellement en leur milieu est un parallélogramme



D+C=2dr
A=C et B=D
OA=OC et
OB=OD

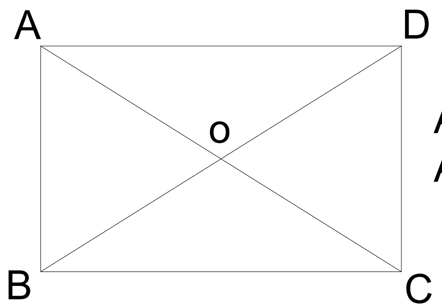
la somme des carrés des cotés des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des diagonales.

<u>rectangle :</u> (rectangle) quadrilatère dont les quatre angles sont égaux ; de cette définition découle qu'il s'agit de 4 angles droits. Le rectangle est un cas particulier de parallélogramme.

<u>Propriétés :</u>

- toute celles du parallélogramme
- les diagonales d'un rectangle sont égales

<u>conditions pour qu'un parallélogramme soit un rectangle :</u> tout parallélogramme dont les diagonales sont égales est un rectangle



A=B=C=D=1dr
AC=BD

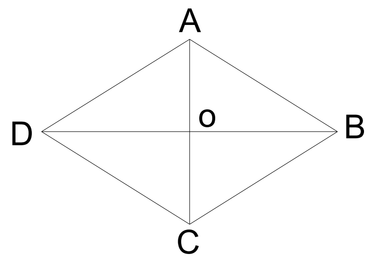
losange : (rhombus) quadrilatère dont les quatre cotés sont égaux ; il s'agit d'un cas particulier de parallélogramme

propriétés :

- toutes celles d'un parallélogramme
- les diagonales d'un losange sont perpendiculaires entre elles

conditions pour qu'un parallélogramme soit un losange :

- tout parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange

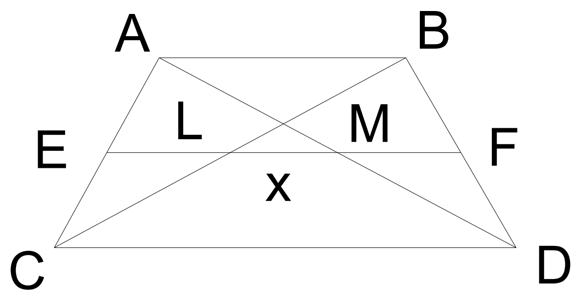


AB=BC=CD=DA
AC perpendiculaire
à BD en 0 leur milieu

Carré : (square) quadrilatère dont les cotés et les angles sont égaux ; c'est un cas particulier de parallélogramme, et il possède toute les propriétés du rectangle et du losange

Trapèze : (trapezoid) quadrilatère dont deux cotés sont parallèles. Ces cotés parallèles sont appelés bases et la distance de ces bases est appelée hauteur

<table>
<tr>
<td>
<u>Base moyenne d'un trapèze :</u> dans tout trapèze, le segment de droite passant par le milieu des cotés non parallèles :

a) est parallèle aux bases
b) en vaut la moyenne arithmétique
c) passe par le milieu des diagonales
d) le segment compris entre les milieux des diagonales vaut la demi-différence des bases
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>
<u>Hypothèse :</u>

EA=ED
FB=FD
</td>
<td>
<u>Thèse:</u>

EF//CD
EF=(AB+CD)/2
L et M milieux de CB et AD
LM=(CD-AB)/2
</td>
</tr>
</table>

CORDES, ARCS ET CIRCONFERENCES

Définitions :

Circonférence: lieu des points du plan équidistants d'un point fixe appelé centre de la circonférence (circumference)

Rayon (radius) : distance du centre à un point quelconque de la circonférence

Position d'un point : celui-ci peut être intérieur, afférent ou extérieur à la circonférence suivant que sa distance au centre est inférieure, égale ou supérieure au rayon.

Cercle (circle) : portion de plan limitée par une circonférence

Egalité : deux circonférences sont égales si elles ont même rayon

Sécante (secant) : droite rencontrant une circonférence en deux points

Corde (chord) : segment de droite joignant deux points à la circonférence

Arc (arc) : portion de circonférence comprise entre deux points

Diamétre (diameter) : corde passant par le centre de la circonférence

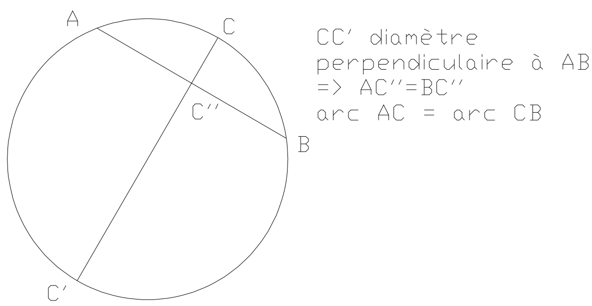
Secteur (sector) : portion de cercle limitée par deux rayons et l'arc intercepté

Segment (segment) : portion de cercle limitée par un arc et sa corde

Théorèmes :

<table>
<tr><td colspan="2">Intersection d'une droite et d'une circonférence : une droite rencontre une circonférence en deux, un ou zéro points suivant que sa distance au centre est inférieure, égale ou supérieure au rayon</td></tr>
<tr><td colspan="2">Relations entre un arc et une corde : dans un même cercle, ou dans des cercles égaux :

- deux arcs égaux sont sous tendus par des cordes égales
- de deux arcs inégaux, inférieurs à une demi circonférence, le plus grand est sous tendu par une plus grande corde</td></tr>
<tr><td colspan="2">Relations entre un arc et une corde : dans un même cercle, ou dans des cercles égaux :

- deux arcs égaux sont sous tendus par des cordes égales
- de deux arcs inégaux, inférieurs à une demi circonférence, le plus grand est sous tendu par une plus grande corde</td></tr>
<tr><td>diamètre perpendiculaire à une corde : il divise celle-ci et les arcs sous tendus en parties égales</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Distance d'une corde au centre : Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :

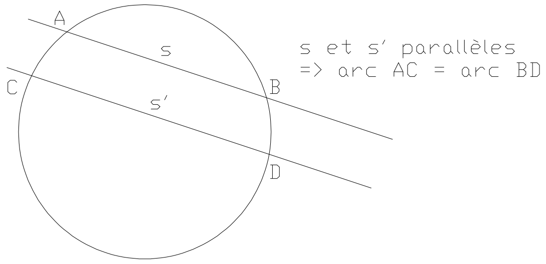
- deux cordes égales sont également éloignées du centre
- de deux cordes inégales, la plus grande est la plus rapprochée du centre

réciproque : dans un même cercle ou dans des cercles égaux :</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">

- deux cordes également éloignées du centre sont égales
- de deux cordes inégalement éloignées du centre la plus rapprochée est la plus grande

</td></tr>
<tr><td><u>Sécantes parallèles :</u> deux droites parallèles interceptent sur une circonférence des arcs égaux.</td><td>



</td></tr>
</table>

<u>Détermination d'une circonférence :</u> par trois points non alignés, on ne peut faire passer qu'une circonférence et une seule.

<u>Nombres de points de rencontres de deux circonférences :</u> deux circonférences distinctes ne peuvent avoir que deux points commun et pas davantage, si trois points leur étaient commun, elles seraient confondues

S'il n'y a qu'un point commun, il s'agit d'un point de tangence (intérieure ou extérieure). S'il y a deux points commun, ils sont symétriques par rapport à la droite des centres.

L'angle de deux circonférences sécantes est l'angle formé par leur tangentes en un des points communs. Si cet angle est droit, les deux circonférences sont dites orthogonales.

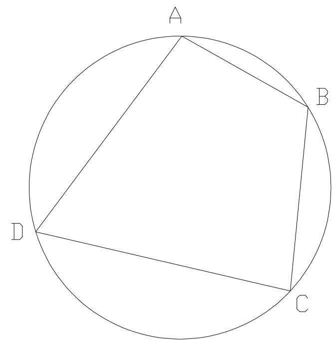
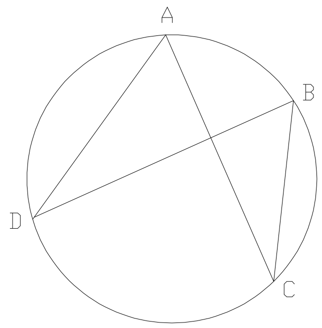
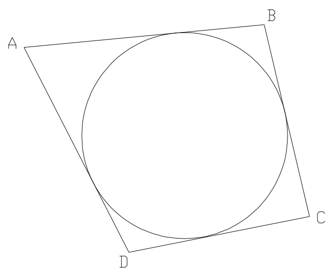
<u>Relations entre les rayons de deux circonférences :</u> la distance des centres de deux circonférences coplanaires est :

- supérieure à la somme des rayons si elles sont extérieures
- égale à la somme des rayons si elles sont tangentes extérieurement
- comprise entre la somme et la différence des rayons si elles sont sécantes
- égale à la différence des rayons si elles sont tangentes intérieurement
- inférieure à la différence des rayons si elles sont intérieures l'une à l'autre.

<u>FIGURES INSCRITES ET CIRCONSCRITES</u>

<u>Définitions :</u>

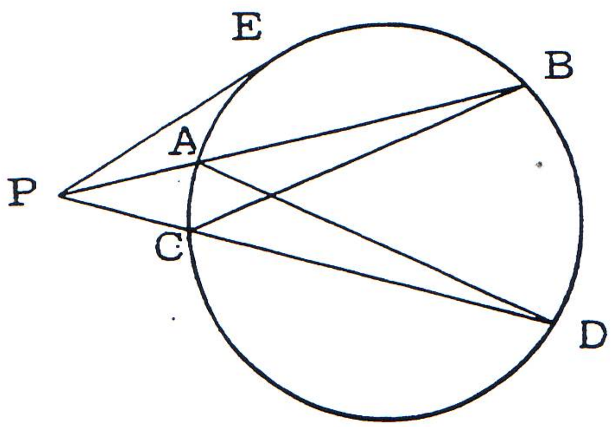
- un polygone est inscriptible dans un cercle lorsque tous ses sommets peuvent être situés sur une même circonférence ; cette circonférence est inscriptible au polygone.
- Un polygone est circonscriptible à un cercle lorsque tous ses cotés peuvent être tangents à une même circonférence ; cette circonférence est dite inscrite dans le polygone.

Dans tout quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, les angles opposés sont supplémentaires. A+C=2dr. B+D=2dr. Réciproquement, tout quadrilatère convexe dont les angles opposés sont supplémentaires est inscriptible à un cercle	
Dans tout quadrilatère non convexe inscrit dans un cercle, les angles opposes sont égaux A=C et B=D Réciproquement, si un quadrilatère non convexe a deux cotés opposés égaux, il est inscriptible à un cercle.	
<u>Quadrilatère convexe circonscriptible :</u> les sommes des cotés opposés sont égales AB+CD=BC+AD Réciproquement, si les sommes des cotés opposes d'un quadrilatère convexe sont égales, alors il est circonscriptible à un cercle.	

<u>Condition pour que quatre points soient concycliques :</u> la condition est qu'en les joignant deux à deux on forme :

- soit un quadrilatère convexe dont les angles opposés sont supplémentaires
- soit un quadrilatère non convexe dont les angles opposés sont égaux

<u>puissance d'un point par rapport à un cercle :</u>



<u>Hypothèse</u> : $\begin{cases} \text{Circonférence } \gamma, \\ \text{point P de son plan.} \\ \text{PAB, PCD sécantes quelconques.} \end{cases}$

<u>Thèse</u> : $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

<u>Hypothèse</u> : $\begin{cases} \text{Circonférence } \gamma, \text{ P extérieur} \\ \text{PE tangente , PAB sécante} \end{cases}$

<u>Thèse</u> : $PE^2 = PA \cdot PB$

<u>polygone régulier :</u> un polygone est régulier lorsqu'il est équilatéral et équiangle. Un polygone régulier est inscriptible à un cercle et circonscriptible à un autre cercle.

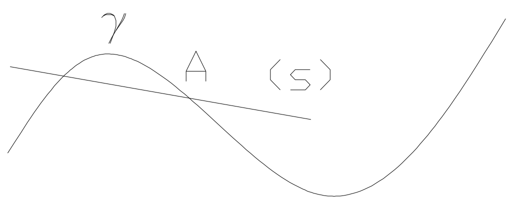
<u>LIEUX GEOMETRIQUES</u> (conditional lines or point curves)

Un lieu géométrique est un ensemble de points jouissant tous d'une même propriété.

- Lieu des points équidistants de deux points donnés : médiatrice du segment de droite unissant ces deux points
- Lieu des points équidistants de deux droites données : bissectrice de l'angle formé par ces deux droites
- Lieu des points équidistants d'un point fixe : circonférence décrite de ce point comme centre avec la distance constante comme rayon
- Lieu des points équidistants d'une droite donnée : ensemble de deux parallèles à la droite donnée tracées à une distance égale à la distance donnée.
- Lieu des points d'où l'on voit un segment AB sous un angle donné : arc du segment capable de l'angle α décrit sur AB comme corde

TANGENTES ET NORMALES

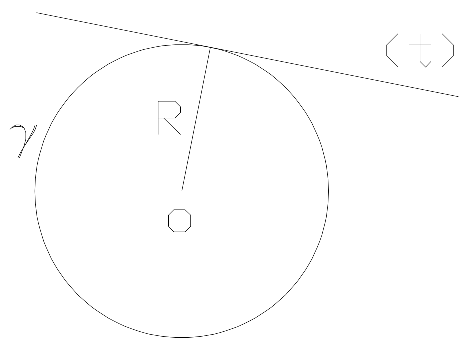
Tangente à une courbe : soit γ une courbe (curve) et (s) une droite sécante



Si nous faisons tourner (s) autour de A, point d'intersection de (s) et de γ, B va se rapprocher de plus en plus de A jusqu'à être confondu avec lui. Dans ce cas nous dirons que (s) est tangente à γ, d'où la définition :

La tangente en un point d'une courbe est une sécante telle que deux de ses points de rencontres avec la courbe soient confondus

Angle d'une tangente et d'un rayon : la tangente en un point d'une circonférence est perpendiculaire au rayon passant par le point de contact



<u>réciproque :</u> la perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon d'une circonférence est tangente à la circonférence en ce point.

<u>Corollaire :</u>

- en chaque point d'une circonférence il y a une tangente et une seule
- tous les points d'une tangente à une circonférence sont extérieurs à celle-ci, à l'exception du point de contact
- les tangentes aux extrémités d'un diamètre sont parallèles entre elles

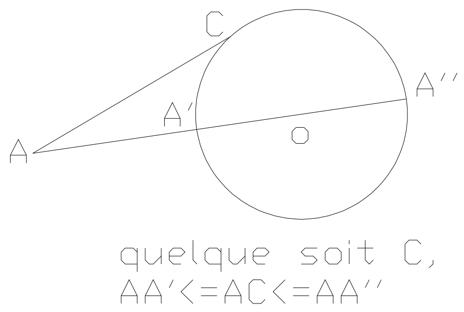
<u>normale à une courbe :</u> la normale en un point d'une courbe est perpendiculaire à la tangente en ce point

<u>conséquence :</u>

- toutes les normales à une circonférence passent par le centre
- par tout point du plan, on ne peut mener qu'une normale et une seule

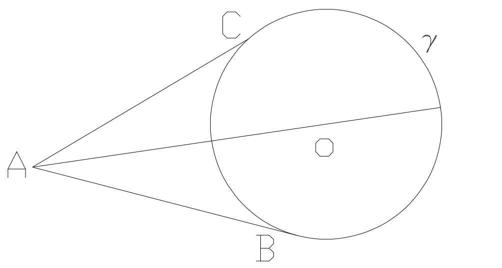
<u>distance normale :</u> les distances normales d'un point à une circonférence sont les distances de ce point à la circonférence, mesurées sur la normale passant par ce point

la distance d'un point du plan à un point quelconque est comprise entre les distances normales de ce point



<u>tangente à une circonférence :</u> d'un point extérieur à une circonférence :

- on peut mener deux tangentes distinctes à cette circonférence
- les portions de tangentes comprises entre le point d'où elles sont issues et le point de contact sont égales



(AB) et (AC) tangente à γ
AB=AC
(□A) bissectrice de BAC

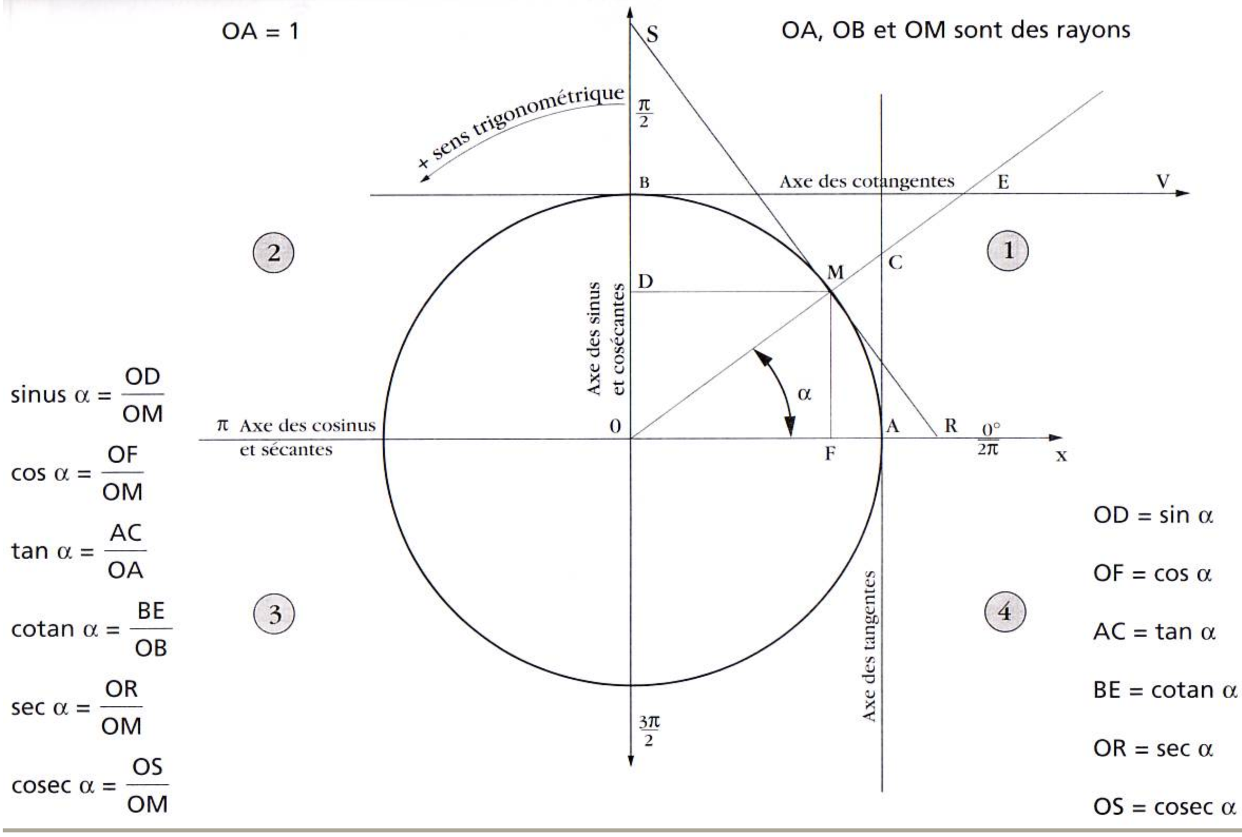
RAPPELS DE TRIGONOMETRIE

Unité : radian ; un angle de un radian intercepte , sur un cercle centré en son sommet, un arc de longueur égale au rayon de ce cercle, soit : $L = 2\Pi\, R$, $\overline{AB} = \alpha\ rad\, R$ et $\alpha\ rad = \frac{L}{R}$; la mesure d'un angle est un nombre pur, sans dimensions.

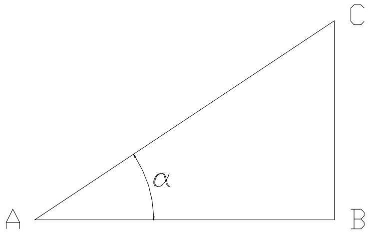
Autres unités : degré : $1° = \frac{2\Pi}{360} rad$, minute : $1' = \frac{1}{60}°$, seconde : $1'' = \frac{1}{360}°$

La mesure des angles est donnée à un ou plusieurs tours prés, i.e. $\alpha\ rad = \alpha + 2k\Pi$, avec k nombre entier; pour tout angle supérieur à 2Π, on cherche sa mesure principale comprise entre 0 et 2Π.

cercle trigonométrique :



Relations fondamentales :



$\cos(\alpha) = \dfrac{AB}{AC}$; $\sin(\alpha) = \dfrac{BC}{AC}$; $\tan(\alpha) = \dfrac{BC}{AB}$;

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

$\cot an(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$

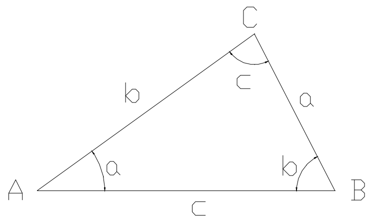
$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$;

$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

La fonction cosinus est paire : cos(x)=cos(-x) ; l'équation cos(x)=a admet deux solutions : x=α+2kΠ et x=-α+2kΠ (k entier relatif)

La fonction sinus est impaire : sin(-x)=-sin(x) ; l'équation sin(x)=a admet donc deux solutions : x=α+2kΠ et x=Π-α+2kΠ (k entier relatif)

relations dans un triangle quelconque :



$\dfrac{a}{\sin(a)} = \dfrac{b}{\sin(b)} = \dfrac{c}{\sin(c)}$

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(c)}$

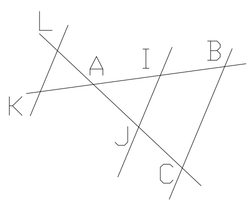
$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos(b)}$

$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos(a)}$

valeurs numériques particulières :

angle en degrés	Angle en radians	sin	cos	tan	cotg
0	0	0	1	0	∞
30°	π/6	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45°	π/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60°	π/3	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
90°	π/2	1	0	∞	0

Théorème de Thalès:



AI/AB=AJ/AC
AK/AB=AL/AC
IJ/BC=AI/AB
KL/CB=AL/AC